Class Number Relations (P-Adic L-Functions and Algebraic Number Theory)

AUTHOR(S):

片岡, 俊孝

数理解析研究所講究録
411巻 1981年 142-161

Class Number Relations

東大 教養　片岡 俊孝

§0. Introduction.

ここにいう class number relation とは、次のような問題のことである。

Class number relation の問題 I

$k_1, k_2, \cdots k_r$ を有限次代数体（$r \geqq 1$, integer），$a_1, a_2, \cdots, a_r$ を有理整数とする。

$$\prod_{i=1}^{r} \zeta_{k_i}(s)^{a_i} = 1 \tag{0.1}$$

が成り立つとき、

$$\prod_{i=1}^{r} h_{k_i}^{a_i} \tag{0.2}$$

をもとめよ。

ただし、有限次代数体 k に対して、$\zeta_k(s)$, h_k でそれぞれ k の Dedekind ζ-函数、類数をあらわす。

まず、この問題に対して、知られていることをまとめておこう。

1. 対応する Dedekind ζ-函数の $s=1$ での residue よりもとめる方法。

(a) R. Brauer は、(0.1) の仮定のもとで、(0.2) の単数群の index の積による表示を与え、(0.2) は、単数群の Galois module structure のみに依存することを示した。しかし、index の中にあらわれる単数からなる群は、Galois module として、存在が、保証されているだけで、具体的に与えられているわけではない。相対的な場合 (以下のIIの (0.3) の仮定のもとで) には、C. D. Walter [23] が、R. Brauer [1] より出発して、類似の表示を与えた。また、その論文の中で、R. Brauer [1] の短い証明を与えている。

(b) その Galois 群が、elementary abelian group (i.e. $(l,\cdots,l)$ 型のアーベル群、l は素数) である有限次代数体の Galois 拡大 K/k に対して、k, K, 及び K/k の極小な部分体間に、(0.1) のような自明でない (i.e. a_i の中に 0 でないものが存在する) 関係が、一般には、唯一つ存在するが、S. Kuroda [15] は、そのようなものに対して、(0.2) を具体的に求めた。その表示の中の主要項は、K の単数群と、すべての極小な部分体の単数より生成される群との index である。C. D. Walter [24] は、これを多少一般化した。

(c) 1970 年代に、R. Brauer [1] より出発して、いくつか

の場合に、(0.2)の具体的な表示が求められた(N. Moser [16], [17], [18], F. Halter-Koch and N. Moser [9], W. Jehne [10], C. D. Walter [22])。この中でC. D. Walterが、最も一般的であるので、それを述べる。K/kを、有限次代数体のFrobenius拡大(i.e. Galois拡大であって、そのGalois群が、Frobenius部分群をふくむもの)，M，LをそれぞれFrobenius部分群，そのnormal complementに対応する体とする。k，M，L，Kの間に、(0.1)のような自明でない関係は、一般には、唯一つ存在する。そのようなものに対して、(0.2)の具体的な表示を、$Gal(K/k)$がmaximal type，あるいはmetacyclicの場合に与えた。その表示の中の主要項は、Kの単数群と、Mの単数のk上の共役すべて及びLの単数で生成される群とのindexである。

2. 代数的方法.

(a) Kを$\mathbb{Q}$上のbicyclic biquadratic extension (i.e. アーベル拡大であって、そのGalois群が(2,2)型)、K_1, K_2, K_3をKにふくまれる相異なる2次体とする。このとき、(0.1)の関係

$$\zeta_K(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s)=\prod_{i=1}^{3}(\zeta_{K_i}(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s))$$

が成立し、これに対する(0.2)のS. Kuroda [15]と同じ表示を、代数的方法で、T. Kubota [13], [14] (のちにF. Halter-Koch [6])

は、与えた。

(b) K/kを有限次代数体の Frobenius 拡大とする。$k=\mathbb{Q}$, $\mathrm{Gal}(K/k)\simeq S_3$ のとき、T. Callahan [2], [3]、$k=\mathbb{Q}$, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\simeq D_{2l}$ (i.e. 位数 $2l$ の二面体群, lは奇数) のとき、F. Halter-Koch [7] が、I (c) で述べたのと同一の表示を代数的方法によって与えた。また、kが任意の有限次代数体、$\mathrm{Gal}(K/k)$の normal complement が奇素数巾の位数をもつとき I (c) で得られた表示と同一のものを、J.-F. Jaulent が、純代数的に得たらしい(Zbl., 416・12003 (1980), F. Halter-Koch [7] の G. Gras による review)。

次に基礎体が、任意の有限次代数体のときの class number relation の問題の別の formulation を与える。

以後、

$$\begin{cases} k;\ \text{有限次代数体,} \\ K;\ k\ \text{上の有限次 Galois 拡大,} \\ G=\mathrm{Gal}(K/k)\ ;\ K/k\ \text{の Galois 群,} \\ p;\ \text{素数,} \end{cases}$$

であるとする。

Class number relation の問題 II

(0.3)
$$\sum_H a_H 1_H^G = 0$$

が成り立つとする。Hは、Gの部分群の共役類の代表系をわ

たり、a_H は整数、1_H^G は、H の単位指標より induce された G の指標である。このとき、

(0,4) $$\prod_H h_{K^H}{}^{a_H}$$

をもとめよ。

Remark. "$\sum_H a_H 1_H^G = 0 \Rightarrow \prod_H \zeta_{K^H}(s)^{a_H} = 1$" が成り立つ。$k=\mathbb{Q}$ のとき、2つの条件は同値である。

§1では、Galois群の作用を有効に利用して、イデアル類群相互の関係を調べる方法を与える。また、ある種の自明でない (0,3) ような関係が成り立てば、常に $\prod_H h_{K^H}{}^{a_H} = 1$ であることを示す。

§2では、$G = S_4$ のとき Galois群の作用を用いて得られることを、いくつか述べる。

§3では、cohomology 的方法により、metacyclic な Frobenius 拡大に対して、1(c) で述べた4つの体の類数間の relation を与える。これは、1(c) での表示とことなり、主要項は、単数群の cohomology 群の積である。これは、1(c) で得られたものと比較して、(0,2)(あるいは(0,4))のとりうる値の範囲の評価を考えるとき、よりよいものを与えている。

§1. Galois action.

記号：有限次代数体 k，素数 p に対して、$C_k(p)$, $h_k(p)$ で

k の p-class group, B びその位数をあらわす。

p-class groups に対して、次のような一種の interpolation が成り立つ。

<u>定理 1.</u> abelian category $\mathbb{Z}_pG$-mod から、有限アーベル群のなす abelian category への covariant additive functor F で、

$$F(\mathbb{Z}_pG\,\underline{H}) \simeq C_{K^H}^{(p)}$$

がすべての G の部分群 H に対して成り立つものが存在する。

ただし、

$\mathbb{Z}_pG$-mod. ; 有限生成 left $\mathbb{Z}_pG$-modules のなす abelian category,

$\mathbb{Z}_pG\,\underline{H}$; $\underline{H} = \sum_{\sigma \in H} \sigma$ $(\in \mathbb{Z}_pG)$ より生成される $\mathbb{Z}_pG$ の left ideal

である。

<u>定理 1'.</u> abelian category $\mathbb{Z}_pG$-mod. から有限アーベル群のなす abelian category への covariant additive functor F' で、

$$F'(\mathbb{Z}_pG\,\underline{H}) \simeq \mathrm{Ker}\,([{C_{K^H}^{(p)}} \longrightarrow C_K^{(p)})$$

がすべての G の部分群 H に対して成り立つものが存在する。

Remark 1. 一般に、abelian categories A, B に対して、A から B への functor F が additive であるとは、任意の A の objects X, Y に対して、F の induce する $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ から $\mathrm{Hom}_B(F(X), F(Y))$ への map が、アーベル群としての homomorphism になっていることである。また、F が additive であれば、つねに、$F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y)$ が成り立つ。

Remark 2. 定理1′で、$\mathrm{Ker}(C_{K^H}^{(p)} \to C_K^{(p)})$ は、拡大 K/K^H で単項化する K^H のイデアル類のなすアーベル群の p-Sylow group に他ならないから、$F'(\mathbb{Z}_pG) \simeq \mathrm{Ker}(C_{K^H}^{(p)} \to C_K^{(p)}) = 0$ である。Remark 1 に注意すれば、有限生成 projective module P に対して、$F'(P) = 0$ であることが、P が有限個の $\mathbb{Z}_pG$ の直和の直和因子であることよりわかる。

Remark 3. $\mathbb{Z}_pG$-mod では、Krull-Remak-Schmidt の定理が成り立つ。すなわち、有限生成 $\mathbb{Z}_pG$-module は、直既約なな有限生成 $\mathbb{Z}_pG$-module の直和にかけ、しかもそれは一意的である（C. Curtis - I. Reiner [5], あるいは I. Reiner [19] をみよ）。

Remark 4. $p \nmid \#G$ のときは、$\mathbb{Z}_pG$ は $\mathbb{Q}_pG$ の maximal order となり、したがって、$\mathbb{Z}_p$-module として torsion-free な有限生成 $\mathbb{Z}_pG$-module M, N に対して、

$M \simeq N$ as $\mathbb{Z}_pG$-module $\iff$ $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ as $\mathbb{Q}_pG$-module

が成り立つ（I. Reiner [19] をみよ）。

Remark 5. 応用上 $\mathbb{Z}_pG\underline{H}$ の直既約表現の直和への分解をもとめることが大事であるが、L. Scott [21] より、$\mathbb{F}_pG\underline{H}$ のそれをもとめれば十分であることがわかっている。

定理の証明は、比較的容易である。証明は、定理1の場合のみ述べる。

<u>定理1の証明</u>

(a) functor F は次のように定める。

objects の対応； $M \in \mathbb{Z}_pG$-mod に対し，

$$F(M) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*, J_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)}{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*, K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) + \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*, U_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)}$$

morphism は，自然に induce されるもの。

ただし，$M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}_p)$ で，M^* は，自然に right $\mathbb{Z}_pG$-module とみなせる。J_K, $K^\times$, U_K は，それぞれ K の idele 群，乗法群，unit ideles のなす群である。また，$X = J_K$, $K^\times$, U_K に対して，$X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ は，X を乗法に関して $\mathbb{Z}$-module とみなしたものであり，演算は additive にかく。$K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \hookrightarrow J_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$，及び $U_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \hookrightarrow J_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ により，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*, K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*, U_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$ は，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(M^*, J_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$ の部分群とみなせることに注意する。

(b) $M \in \mathbb{Z}_pG$-mod に対し，$F(M)$ が有限になることが，標準的方法で示せる。

(c) $F(\mathbb{Z}_pG\underline{H}) \simeq C_{K^H}{}^{(p)}$ は，次のよく知られた事実（たとえば，I. Reiner [19] を見よ）による。

① "$\mathrm{Hom}_{RG}(V \otimes_{\mathbb{Z}} R, M \otimes_{\mathbb{Z}} R) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(V, M) \otimes_{\mathbb{Z}} R$" が，$\mathbb{Z}$-flat commutative algebra R，有限生成 $\mathbb{Z}_pG$-module V，及び $\mathbb{Z}_pG$-module M に対して成立。

② $$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{RG}(\underline{H}RG, M) & \simeq & M^H . \\ f & \longmapsto & f(\underline{H}) \\ (\underline{H}x \mapsto mx) & \longleftarrow\!\shortmid & m \end{array}$$

③ $(RG\underline{H})^* \simeq \underline{H}RG$ 。

定理1を，class number relation へ応用するため，次の記号を導入する．

$a(G)$; G の部分群の共役類を生成元とする free abelian group.

G の部分群 H のふくまれる共役類の generator を $[H]$ とかく。

$$b_p(G) = \{\sum_H a_H[H] \in a(G) \mid \prod_{a_H>0} \mathbb{Z}_pG\underline{H}^{a_H} \simeq \prod_{a_H<0} \mathbb{Z}_pG^{-a_H},\ a_H \in \mathbb{Z}\}$$

; $a(G)$ の部分群.

ただし，非負整数 a に対して，M^a は，$a=0$ のとき，0，$a>0$ のときは，M の a 個の copy の直和をあらわす。

$$b_0(G) = \{\sum_H a_H[H] \in a(G) \mid \sum_H a_H \left|\genfrac{}{}{0pt}{}{G}{H}\right| = 0\}$$

$$b(G) = \bigcap_{\ell:\text{prime number}} b_\ell(G)$$

さて，簡単にわかることを述べておこう。

<u>命題1.1.</u> $\sum_H a_H[H] \in b_p(G)$ ならば，$\prod_H h^{(\varphi)}_{K^H}{}^{a_H} = 1$ である。

<u>証明.</u> 実際，定理1と Remark 1 より，$\prod_{a_H>0} C_{K^H}(\varphi)^{a_H} \simeq \prod_{a_H<0} C_{K^H}(\varphi)^{-a_H}$ が，成り立つ。

<u>命題1.2.</u> $b_p(G) \subset b_0(G)$。$p \nmid \#G$ のときは，$b_p(G) = b_0(G)$。

<u>命題 1.3.</u> $\sum a_H[H] \in b(G)$ ならば、$\prod_H t_{k_H}^{a_H} = 1$ である。

G が、巾零群ならば、すべての p に対して、$b_p(G)$ が、簡単にわかる。そのことより、

<u>命題 1.4.</u> G が巾零群であるとする。

$b(G) \neq 0 \Leftrightarrow$ 2つ以上の素数 l に対して、G の l-Sylow subgroup が cyclic ではない。

§2. $G = S_4$.

$G = S_4$ とし、このとき、定理1及び定理1′より得られることのいくつかの例をあげる。

最初に $\mathbb{Z}_pG_{\underline{H}}$ の直既約表現の直和への分解を決定しよう。$G = S_4$ を、4つの文字 a, b, c, d の automorphism 全体と同一視する。G の部分群の共役類は、11ケあり、その代表系は、次の通りである。

$\{1\}$, $\langle(ab)\rangle$, $\langle(ab)(cd)\rangle$, $\langle(abcd)\rangle$, $\langle(ab),(cd)\rangle$, $H = \{1, (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc)\}$, $\langle H, (ab)\rangle$, $\langle(abc)\rangle$, $\langle(ab),(abc)\rangle$, A_4, G.

$p \neq 2, 3$ のとき、$\mathbb{Z}_p$ 上の直既約表現は、$\mathbb{Q}_p$ 上の既約表現と同じであるから、$p = 2, 3$ のときを求めれば十分である。

$\mathbb{Z}_pG_{\underline{H}}$ の直既表現の直和への分解は、以下の表の通りである。

$H \backslash p$	3	2
$\{1\}$	$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3^3 \oplus P_4^3$	$P_1^2 \oplus P_0$
$\langle (ab) \rangle$	$P_1 \oplus P_3^2 \oplus P_4$	$P_1 \oplus Q_4$
$\langle (ab)(cd) \rangle$	$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4$	Q_7
$\langle (abcd) \rangle$	$P_1 \oplus P_4$	P_0
$\langle (ab), (cd) \rangle$	$P_1 \oplus P_3$	Q_6
H	$P_1 \oplus P_2$	Q_5
$\langle H, (ab) \rangle$	P_1	$Q_3^2 \oplus Q_2$
$\langle (abc) \rangle$	$P_3 \oplus P_4 \oplus Q_1 \oplus Q_2$	Q_4
$\langle (ab), (abc) \rangle$	$P_3 \oplus Q_1$	$Q_3 \oplus Q_1$
A_4	$Q_1 \oplus Q_2$	Q_2
G	Q_1	Q_1

ただし、この表の中の P_*, Q_* は、次のようなものである。

$p=3$ のとき、

$P_1 \sim P_4$; 相異なる projective indecomposable modules,

Q_1, Q_2 ; 相異なる non-projective indecomposable modules.

$p=2$ のとき、

P_0, P_1 ; 相異なる projective indecomposable modules,

$Q_1 \sim Q_7$; 相異なる non-projective indecomposable modules.

Remark. $p \nmid \# H$ のときは、modular 表現よりわかる（たとえば、J. P. Serre [20]）。直既約表現への分解を決定するには、modular

表現に関する事実を利用した。

この表より、

<u>命題2.1.</u>
$$\begin{cases} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h_0(G)=6, \\ \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h_3(G)=5, \\ \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h_2(G)=2, \\ \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ h(G)=1. \end{cases}$$

とくに、$h(G)$ の generator として、次のようなものがとれる。

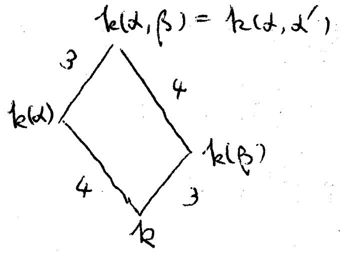
<u>命題2.2.</u> $h(G) = \mathbb{Z}\cdot([\{1\}] + 2[<(ab),(abc)>] + 2[<H,(ab)>] + [A_4] - 2[<(ab)>] - [<(abc)>] - [H] - 2[G])$。

したがって、k上互いに共役ではない8ケの体のイデアル類群の間に、次のようなabel群としての同型が成り立つ。

<u>命題2.3.</u>
$$C_K \oplus C^2_{K^{<(ab),(abc)>}} \oplus C^2_{K^{<H,(ab)>}} \oplus C_{K^{A_4}} \simeq C^2_{K^{<(ab)>}} \oplus C_{K^{<(abc)>}} \oplus C_{K^H} \oplus C_k^{\,2}.$$

定理1′及びRemark 2に注意すると、単項化に関して、次のことがわかる。

<u>命題2.4.</u> $\alpha, \beta \in K$ を、$k(\alpha) = K^{<(ab),(abc)>}$, $k(\beta) = K^{<H,(ab)>}$ となるようにとる。



このとき、

$\mathrm{Ker}(C_k \to C_{k(\beta)}) = \mathrm{Ker}(C_{k(\alpha)} \to C_{k(\alpha,\beta)})$。

ただし、α' は α のある k上の共役である。

イデアル類群の exponents, divisibilities に関して、たとえ

ば、次のことがわかる。

<u>命題2.5.</u>　$p \neq 2$ とする。

(1)　C_K の p-exponent $=$ $C_{K^{\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle}}$ の p-exponent,

(2)　$p \mid h_K \Longleftrightarrow p \mid h_{K^{\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle}}$.

§3.　G = metacyclic Frobenius group.

この§では、定理1より直ちにわからない場合の class number relation の一つについて考える。Gに、次のような部分群 H, N が存在すると仮定する。

$G = H \ltimes N$;　H, N は cyclic subgroup, N は normal subgroup, H は G の Frobenius 部分群 (i.e. $\forall \sigma \in G \setminus H$, $\sigma^{-1} H \sigma \cap H = \{1\}$), $H \neq \{1\}$, $N \neq \{1\}$.

$a(G)$ の元 $[\{1\}]$, $[H]$, $[N]$, $[G]$ の $\mathbb{Z}$ 係数線型結合で、$b_0(G)$ に属するものは、$[\{1\}] - \#H[H] - [N] + \#H[G]$ で生成されている。<u>以下、この元に対応する class number relation を求める。</u>

<u>命題3.1.</u> (1) $p \nmid \#N$ のとき、

$$[\{1\}] - \#H[H] - [N] + \#H[G] \in b_p(G),$$

(2)　$p \mid \#N$ のとき、

$$[\{1\}] - \#H[H] - [N] + \#H[G] \notin b_p(G).$$

したがって、$p \mid \#N$ のとき、$h_K h_k^{\#H} / h_{KN} h_{KH}^{\#H}$ の p-part, あるいは $h_K(p) h_k(p)^{\#H} / h_{KN}(p) h_{KH}(p)^{\#H}$ をもとめればよい。ところで、これは、N の位数が、p の巾の case に還元できるから、<u>以下、N の位数は、p の巾であると仮定する</u>。

<u>定義</u> $X(H) = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z}_p^\times)$ （$\#H \mid p-1$ である）.

$\chi \in X(H)$ に対して、

$$e_\chi = \frac{1}{\#H}\sum_{h \in H} \chi(h^{-1})\, h \quad (\in \mathbb{Z}_p H),$$

$$P_\chi = \mathbb{Z}_p G\, e_\chi ,$$

$$Q_\chi = \mathbb{Z}_p G\, \underline{N} \cdot e_\chi .$$

とおく。

仮定より p は奇素数であることを注意する。

<u>命題 3.2.</u> $0 \to Q_\chi \to P_\chi \to P_{\chi\eta} \to Q_{\chi\eta} \to 0$ (exact)。

ただし、η は、$h^{-1} x h = x^{\eta(h)}$, $x \in N$, $h \in H$ で定めた $X(H)$ の元である。

<u>命題 3.3.</u> right $\mathbb{Z}_p G$-module C に対して、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p G}(Q_\chi^*, C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p G}(P_\chi^*, C) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p G}(P_{\chi\eta}^*, C) \arrow[d, "\wr"] & \text{(exact)} \\
& & C \otimes_{\mathbb{Z}_p G} P_\chi \arrow[r] & C \otimes_{\mathbb{Z}_p G} P_{\chi\eta} \arrow[r] & C \otimes_{\mathbb{Z}_p G} Q_{\chi\eta} \arrow[r] & 0 \quad \text{(exact)}.
\end{tikzcd}$$

が成り立つ。ただし、水平方向の exact sequence は、命題 3.2 の exact sequence より induce されたものである。

$C_\chi = C_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_pG} P_\chi \quad (\chi \in X(H))$ とおく。まず、明らかに、

(a) $\quad C_K(p) \simeq \prod_{\chi \in X(H)} C_\chi$.

また、$C = C_K(p)$ として、命題 3.3 を適用すると、任意の $\chi \in X(H)$ に対して、

(b) $\quad \# C_\chi / \# C_{\chi\eta} = \# \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(Q_\chi^*, C_K(p)) / \# C_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_pG} Q_{\chi\eta}$.

さらに、cohomology の計算より、

(c) $\quad \# \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(Q_\chi^*, C_K(p))$

$$= \frac{h_{K^N}(p,\chi) \cdot \#(E_{K^N} \cap N_{K/K^N}(K^\times)/N_{K/K^N}(E_K))^{e_{\chi\eta}} \times \prod_{\mathfrak{q}:\chi|D_\mathfrak{q}=1} e_\mathfrak{q}}{\# H^1(N, E_K)^{e_\chi}},$$

(d)
$$\# C_K(p) \otimes_{\mathbb{Z}_pG} Q_\chi = \frac{h_{K^N}(p,\chi) \cdot \prod_{\mathfrak{q}:\chi\eta^{-1}|D_\mathfrak{q}=1} e_\mathfrak{q}}{(\# N)^{\delta_{\chi,\eta}} \cdot \#(E_{K^N}/E_{K^N} \cap N_{K/K^N}(K^\times))^{e_\chi}}$$

ただし、

$\delta_{\chi,\chi'}$ は、Kronecker の delta,
E_* は、$*$ の単数群,
$D_\mathfrak{q}$ は、$\mathfrak{q}$ の K^N/k での分解群,
$e_\mathfrak{q}$ は、K^N の $\mathfrak{q}$ 上の素イデアルの K/K^N での分岐指数,
$h_{K^N}(p,\chi) = \#(C_{K^N}(p))^{e_\chi}$,

で、積にあらわれる $\mathfrak{q}$ は、k の素イデアルをわたる。

簡単にわかるように、

(e) $\quad h_{K^N}(p) = \prod_\chi h_{K^N}(p,\chi)$,

(f) $\quad h_{K^N}(p, 1_H) = h_k(p)$ 。

(a) 〜 (f) より，class number relation の p-part がわかる。

Remark 1. P_χ，Q_χ を表面に出さなくとも，計算できる。

Remark 2. (c)，(d) の証明は，多少，手間がかかる。

Remark 3. 片岡 [12] の定理 2 (2) の証明の中で，(c)，(d) を使った。

$\mathbb{Z}_pG$－module として，$\mathbb{Z}_pG \cong \prod_\chi P_\chi$，$\mathbb{Z}_pG\underline{H} \simeq P_{1_H}$，$\mathbb{Z}_pG\underline{N} = \prod_\chi Q_\chi$，$\mathbb{Z}_pG\underline{G} = Q_{1_H}$ の分解が成立する。この Case では，P_χ，Q_χ 間の exact sequences を定理 1 の意味で対応する p－class groups 間の homomorphisms を induce させることによって，ある $h_p(G)$ に属さない $h_0(G)$ の元に対して，(0, 4) の p－part を計算することが出来たわけですが，他の case でも，$\mathbb{Z}_pG\underline{H}$ (H は G の部分群) の直和因子たちの間の関係をもとめ，それを induce させることによって，class number relation をもとめることが，出来ればと思っています。しかし，たとえば，maximal type の Frobenius 拡大に対しては，同じ方法では証明することが出来ず，困難な問題であるようにも思われます。

文献

[1] R. Brauer; Beziehungen zwischen Klassenzahlen von

Teilkörpern eines galoisschen Körpers, Math. Nachr., 4, 158—174, 1951.

[2] T. Callahan ; The 3-class groups of non-Galois cubic fields I, Mathematika, 21, 72—89, 1974.

[3] 〃 ; 〃 II, Mathematika, 21, 168—188, 1974.

[4] 〃 ; Dihedral field extensions of order 2p whose class numbers are multiples of p, Canad. J. Math., 28, 429—439, 1976.

[5] C. Curtis and I. Reiner ; Representation theory of finite groups and associative algebras, Intersc. Pub., New York, 1962.

[6] F. Halter-Koch ; Ein satz über die Geschlechter relativ-zyklischer Zahlkörper von primzahlgrad und seine Anwendung auf biquadratisch-bizyklishe Körper, J. Number Theory, 4, 144—156, 1972.

[7] 〃 ; Einheiten und Divisorenklassen in Galoisscher algebraischen Zahlkörpern mit Diedergruppe der ordnung 2 l für eine ungerade Primzahl l, Acta arith., 33, 353—364, 1977.

[8] 〃 ; Die struktur der Einheitengruppe für

eine Klasse metazyklischer Erweiterungen algebraischer Zahlkörper, J. reine angew. Math., 301, 147–160, 1978.

[9] F. Halter-Koch et N. Moser ; Sur le nombre de classes de certaines extensions métacycliques sur Q ou sur un corps quadratique imaginaire, J. Math. Soc. Japan, 30, 237–248, 1978.

[10] W. Jehne ; Über die Einheiten- und Divisorenklassengruppe von reellen Frobeniuskörpern von Maximaltyp, Math. Z., 152, 223–252, 1977.

[11] 片岡 俊孝 ; イデアル類群と直既約表現, 日本数学会代数分科会予稿集, 1979 年 10 月。

[12] 片岡 俊孝 ; 岩沢類数公式の一般化, 数理研講究録 378 整数論, 47–60, 1980.

[13] T. Kubota ; Über die Beziehungen der Klassenzahlen der Unterkörper des bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers, Nagoya Math. J. 6, 119–127, 1953.

[14] T. Kubota ; Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper, Nagoya Math. J., 10, 65–85, 1956.

[15] S. Kuroda ; Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper, Nagoya Math. J., 1, 1–10, 1950.

[16] N. Moser ; Unités et nombres de classes d'une extension diédrale de $\mathbb{Q}$, Astérisque, 24-25, 29-35, 1975.

[17] " ; Unités et nombres de classes d'une extension Galoisienne diédrale d $\mathbb{Q}$, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1, 54-75, 1979.

[18] " ; Sur les unités d'une extension galoisienne non abélienne de degré pq du corps de rationells, p et q nombre premier impaires, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 29, 137-158, 1979.

[19] I. Reiner ; Maximal orders, Academic Press, London, 1975.

[20] J. P. Serre ; 有限群の線型表現，岩波，1974。

[21] L. Scott ; The modular theory of permutation representations, A. M. S. Proc. Sym., 21, 137-144, 1971.

[22] C. D. Walter ; A class number relation in Frobenius extensions of number fields, Mathematika, 24, 216-225, 1977.

[23] " ; Brauer's class number relation, Acta arith., 35, 33-40, 1979.

[24] " ; Kuroda's class number relation, Acta

arith., 35, 41-51, 1979.

追記；§1 の定理1及び1′のRemark の1つを忘れまし たので，ここに記します。

Remark 6. H_1, H_2 を G の部分群とすると，double coset $H_1\sigma H_2$ $(\sigma\in G)$ に対して，自然な $C_{kH_1}{}^{(p)}$ から $C_{kH_2}{}^{(p)}$ への Galois action による homomorphism が定まる。すなわち，

$$H_1\sigma H_2 ;\ \begin{array}{ccc} C_{kH_1}{}^{(p)} & \longrightarrow & C_{kH_2}{}^{(p)} . \\ \Psi & & \Psi \\ \mathfrak{a}\ (\mathrm{mod, principal}) & \longmapsto & \prod_{\tau\in H_1\backslash H_1\sigma H_2} \mathfrak{a}^{\tau}\ (\mathrm{mod, principal}) \end{array}$$

このようなもの全体が，$C_{kH_1}{}^{(p)}$ から $C_{kH_2}{}^{(p)}$ への Galois 群の作用による自然な写像のすべてであるように思われる。ところで，一般に，G の部分群を index とする $\mathbb{Z}_p$-modules の族 $\{C(H)\}_H$，及び任意の G の部分群 H_1, H_2 に対して，$C(H_1)$ から $C(H_2)$ への合成に関してうまくふるまうような $H_1\backslash G/H_2$ の元の作用が，与えられたとき，そのようなものの中で，$C(H)=\mathbb{Z}_pG\underline{H}$，$C(H_1)$ から $C(H_2)$ への作用として double coset の自然な作用を選んだとき，が universal であることを定理1は示しているように思われる。$\mathbb{Z}_pG\underline{H_1}$ から $\mathbb{Z}_pG\underline{H_2}$ への $H_1\backslash G/H_2$ の元の自然な作用全体の生成する $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_pG\underline{H_1}, \mathbb{Z}_pG\underline{H_2})$ の submodule は，丁度 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_pG}(\mathbb{Z}_pG\underline{H_1}, \mathbb{Z}_pG\underline{H_2})$ に一致することに注意。